

Alexandroaea Maria

**STRATEGII DE REZOLVARE  
A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ  
LA CLASELE I-IV**

## CUPRINS

INTRODUCERE.....	9
------------------	---

### **CAP. I: PROFILUL PSIHOSEDAGOGIC AL ȘCOLARULUI MIC - BAZĂ ÎN STABILIREA STRATEGIILOR DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ**

<b>I.1. Scurt istoric asupra evoluției conceptelor pedagogice în predarea matematicii în ciclul primar .....</b>	13
<b>I.2. Bazele metodice ale predării-învățării matematicii. Obiect și importanță .....</b>	16
<b>I.3. Obiectivele predării-învățării matematicii la clasele I-IV .....</b>	18
I.3.1. Conceptul de obiectiv educațional .....	18
I.3.2. Clasificarea obiectivelor matematicii.....	19
I.3.3. Operaționalizarea obiectivelor predării-învățării matematicii la clasele I-IV .....	20
<b>I.4. Particularitățile psihologice ale copilului de vârstă școlară mică .....</b>	21
<b>I.5. Baza psihologică a formării noțiunilor matematice .....</b>	26
<b>I.6. Aspecte psiho-pedagogice ale dezvoltării copiilor, cu implicații în învățarea matematicii .....</b>	30
<b>I.7. Baza psihologică a utilizării mijloacelor de învățământ .....</b>	31

## CAP. II: BAZELE PSIHOSEDAGOGICE ȘI METODOLOGICE ALE REZOLVĂRII PROBLEMELOR ARITMETICE

<b>II.1. Strategii de rezolvare a problemelor .....</b>	33
<b>II.2. Noțiunea de problemă. Importanța rezolvării lor .....</b>	36
<b>II.3. Clasificarea și încadrarea problemelor într-o anumită tipologie .....</b>	38
<b>II.4. Etapele rezolvării problemelor .....</b>	39
II.4.1. Cunoașterea enunțului problemei .....	40
II.4.2. Înțelegerea enunțului problemei .....	40
II.4.3. Analiza problemei și întocmirea planului logic .....	41
II.4.4. Alegerea și efectuarea operațiilor corespunzătoare succesiunii judecărilor din planul logic .....	41
II.4.5. Activități suplimentare după rezolvarea problemei .....	42
<b>II.5. Metode generale de rezolvare a problemelor .....</b>	42
II.5.1. Metoda analitică.....	44
II.5.2. Metoda sintetică .....	46
<b>II.6. Rezolvarea problemelor simple .....</b>	49
<b>II.7. Rezolvarea problemelor compuse.....</b>	51
<b>II.8. Rezolvarea problemelor tip .....</b>	54
II.8.1. Metoda figurativă (grafică).....	54
II.8.2. Metoda comparației .....	56
II.8.3. Metoda falsei ipoteze .....	59
II.8.4. Metoda mersului invers .....	63
II.8.5. Probleme de mișcare .....	64
II.8.6. Probleme cu mărimi proporționale .....	67
II.8.7. Probleme nonstandard.....	70

## CAP. III: METODE PENTRU O ÎNVĂȚARE ACTIVĂ ÎN

### CADRUL ORELOR DE MATEMATICĂ

<b>III.1. Metode didactice .....</b>	73
III.1.1. Conversația .....	75
III.1.2. Descoperirea .....	76
III.1.3. Demonstrația .....	77
III.1.4. Exercițiul .....	79
III.1.5. Problematizarea .....	82
III.1.6. Metoda instruirii programate .....	83
III.1.7. Brainstorming .....	87
III.1.8. Ciorchinele .....	88
III.1.9. Cubul .....	89
III.1.10. Diagrama Venn .....	90
III.1.11. Cvintetul .....	91
III.1.12. Metoda cadrelor .....	92
III.1.13. Jocul didactic .....	93
<b>III.2. Forme și tehnici de învățare și aprofundare a cunoștințelor matematice .....</b>	95
III.2.1. Lucrări scrise .....	95
III.2.2. Verificarea orală .....	95
III.2.3. Teme pentru acasă .....	95
III.2.4. Aprecierea rezultatelor obținute de elevi în activitatea din afara clasei sau a școlii .....	96
III.2.5. Rebusul .....	96

## CAP. IV: COORDONATE METODOLOGICE ALE CERCETĂRII

### APLICATIVE

<b>IV.1. Scopul, obiectivele și ipoteza de lucru .....</b>	97
<b>IV.2. Metoda cercetării .....</b>	98
IV.2.1. Colective folosite, durată, loc, condiții materiale.....	98
IV.2.2. Etapele experimentului.....	98
IV.2.3. Metode de cercetare folosite în experiment .....	99
<b>IV.3. Contribuții privind dezvoltarea interesului elevului în rezolvarea de probleme .....</b>	102
<b>IV.4. Programa școlară – clasele I-IV- la disciplina matematică....</b>	104

## CAP. V: PREZENTAREA, ANALIZA ȘI INTERPRETAREA

### DATELOR

V.1. Rezultate obținute în evaluarea inițială .....	107
V.2. Rezultate obținute în evaluarea finală .....	116
V.3. Analiza și interpretarea rezultatelor, evaluarea progreselor elevilor .....	125
<b>CONCLUZII .....</b>	129
<b>ANEXE.....</b>	131
<b>BIBLIOGRAFIE .....</b>	158

## CAPITOLUL I

### PROFILUL PSIHOPEDAGOGIC AL ȘCOLARULUI MIC - BAZĂ ÎN STABILIREA STRATEGIILOR DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

#### I.1. Scurt istoric asupra evoluției conceptelor pedagogice în predarea matematicii în ciclul primar

Înțelegerea ideilor care stau la baza pedagogiei matematicii în ciclul primar necesită o succintă prezentare a principalelor tendințe manifestate în decursul istoriei, a etapelor și caracteristicilor evoluției ideilor asupra predării matematicii la acest nivel. Corespunzător factorilor care în diverse etape au avut o influență determinantă (factori verbali, intuitivi, imaginativi sau activi), se pot recunoaște trei tendințe principale care au dominat acest învățământ: învățământul verbal, învățământul intuitiv și învățământul prin acțiune.

În **învățământul verbal** importanța primordială este acordată cuvintelor și simbolurilor în general, în timp ce ideile nu au decât un anumit rol derivat. Ideile matematicii sunt puse în legătură unele cu altele printr-un simbolism convențional. Acest învățământ a dominat o lungă perioadă de timp și s-a manifestat sub mai multe forme: *învățământul mecanic și învățământul formal*. *Învățământul mecanic* se bazează pe o tehnică utilitaristă și sunt vizate în mod special rapiditatea operațiunilor efectuate și aplicarea unor mecanisme calculatorii. *Învățământul formal* se bazează, în exclusivitate, numai pe anumite definiții însușite mecanic de către elevi. Aceasta are rădăcini istorice cu mult mai îndepărtate. Geometria fondată de Euclid a constituit un prim model axiomatic. Studiul istoric al învățământului matematic arată că, la începutul evoluției sale, acesta a fost un învățământ deductiv, bazat pe cunoașterea axiomelor. *Învățământul formal* este fondat în exclusivitate pe *învățământul mecanic* al regulilor și teoremelor deduse din definiții, care erau însușite mecanic, sau pe transmiterea unui limbaj printr-un simbolism oarecare. Această formă de învățământ nu ține seama de vârstă elevului, având aceeași structură pentru toate nivelele. O primă parte era constituită din reguli și teoreme, urmată de o alta cu conținut aplicativ.

Adeptii învățământului mecanic și formal considerau că numai exercițiile repetitive determinau copiii la înțelegerea conceptelor și a regulilor de calcul. Se promova deci o repetiție lipsită de un efort creator. Numai combinată cu înțelegerea legăturilor logice dintre diferențele concepție matematice, repetarea poate constitui un factor determinant al învățării matematicii în școală.

**Învățământul intuitiv.** Intuiția matematică, este cunoașterea calculelor numerice, algebrice sau geometrice, fără ca să intervină raționamentul matematic, fără acel suport și instrument analitic prin care se verifică cunoștințele asimilate. Un anumit raport se stabilește însă între intuiție și logică. Orice intuiție provoacă o anumită dorință de a ne convinge de valabilitatea unor adevăruri. Uneori o bună intuiție matematică ne ajută să anticipăm rezultatele în rezolvarea unor probleme. Concepțiiile cu privire la valoarea intuiției în procesul înșurării matematicii în școală se împart între aceia care consideră că intuiția poate fi limitată la un anumit stadiu de dezvoltare al gândirii, stadiul în care școlarul este capabil numai de raționamente foarte simple și alții care consideră că intuiția este mijlocul cel mai important de a dezvolta gândirea creatoare a elevilor. Învățământul intuitiv reprezintă o primă etapă în calea formării conceptelor matematice, necesară pe o anumită treaptă a învățământului. Imaginea are un anumit rol în intuirea soluțiilor matematice, dar nu un rol decisiv. Din această cauză pedagogia modernă a matematicii limitează învățământul intuitiv la un stadiu al dezvoltării mentale. În învățământul intuitiv se neglijeză acțiunea și factorul operator.

În **învățământul prin acțiune**, factorul operator face această intuiție mai dinamică, mai anticipativă și orientată spre o verificare continuă. În procesul acțiunii cu obiectele, semnificația însăși a imaginilor se schimbă de la un stadiu la altul.

Pentru elaborarea noțiunilor și operațiilor matematice există trei etape: *etapa realistă* (sau experimental instructivă), *etapa intuitivă* și *etapa formal conceptuală* (sau logico-deductivă). Prima etapă are un caracter pur concret, copiii manipulând pur și simplu obiectele ce li se oferă într-o multitudine de posibilități. Cea de-a doua etapă este destinația manipulării imaginilor, care acum înlocuiesc obiectele reale. Cea de-a treia etapă corespunde elaborării materialului semiconcret (adică a imaginilor semiabstractive) prezentat sub forma unor scheme grafice, urmate de introducerea simbolurilor matematice, cum ar fi, spre exemplu simbolul unui număr. În această etapă copilul este capabil să posede noțiuni abstracte. Dintre experiențele privind modernizarea predării matematicii în ciclul

primar, necesită o scurtă prezentare cel puțin experimentele lui Davis, jocurile logice ale lui Dienes și experiențele lui Cuisinnaire.

În proiectul Madison, al căruia principal autor este Robert B. Davis, sunt expuse principiile generale după care se poate organiza, la nivelul claselor elementare, un curs de matematică axat pe ideile fundamentale ale logicii și teoriei mulțimilor. Materialul prezentat în cartea: *Discovery in mathematics*, poate fi combinat pentru a fi adaptat la cerințele unor anumite lecții. La baza principiilor didactice matematice, B. Davis așează principiul conform căruia elevul trebuie să învețe din experiența proprie cu diverse materiale (didactice) și din diverse situații matematice și nu din cele ce li se spune. Desigur că acesta este unu din principiile învățământului activ.

Un accent deosebit este pus pe claritatea și bogăția limbajului matematic, enunțând în acest sens următoarele **principii**:

a) învățătorul trebuie să folosească totdeauna un limbaj precis și să evite greșelile de limbă;

b) când afirmația unui elev conține o idee corectă, expusă într-un limbaj nesigur, atitudinea învățătorului va fi la partea pozitivă a comportamentului, adică la ideea corectă. Chiar dacă răspunsul elevului conține o anumită incertitudine, este necesar să fie subliniată partea pozitivă a răspunsului. Este necesar să i se dea încredere că a înțeles ideea bună.

c) se preferă un răspuns în limbajul autentic și uneori ezitant, în locul unei repetiții exacte și mecanice.

Autorul precizează că scopul lecțiilor este de a da copiilor o experiență activă și să le ofere posibilitatea să descopere ei însăși calea spre adevar.

După mai mulți ani de experimentări în diverse părți ale lumii (America, Anglia, Australia etc.), Z. Dienes consideră că înșușirea primelor elemente de logică la elevii de vîrstă mică trebuie să decurgă în paralel cu înșușirea altor noțiuni ca: relație, mulțime, structură, putere, elemente de geometrie etc. Cercetările întreprinse de Z. Dienes se referă la primele elemente de logică, introducerea noțiunii de număr precum și aplicațiile practice ale noțiunii de număr la măsurarea lungimilor, timpului etc. Sunt concepute jocuri în care relațiile sunt efectiv observate și ușor de distins. Blocurile logice sunt piese astfel construite încât să aibă patru atrbute distincte: mărime, grosime, culoare, formă.

Pentru început copiii sunt învățați să recunoască formele și să numească aceste piese, condiție necesară pentru practicarea jocului. Ei trebuie să aibă de la început libertatea de a alege piesele și de a practica în mod liber jocul până la familiarizarea cu denumirile pieselor și cunoașterea

atributelor lor. Jocurile sunt astfel concepute încât să ofere o creștere treptată a dificultăților de rezolvare.

Metoda denumită „a numerelor colorate”, se bazează pe ideea că elevul trebuie să învețe prin acțiune, prin manipularea materialului intuitiv, prin experiență, căpătând astfel „încredere” în numere și în operațiile cu numere.

Principalul material îl reprezintă „bețișoarele” paralelipipedice, confecționate din lemn, având secțiunea transversală de  $1 \text{ cm}^2$  și lungimea între 1 - 10 cm. Cele zece tipuri diferite de bețișoare (care corespund numerelor 1 - 10 în primul rând, dar și fracțiilor) au culori diferite. Bețișoarele trebuie să aibă un aspect plăcut, atractiv pentru copii. Așezate în scară, ele seamănă cu o claviatură. Posibilitatea de a le pune în lanț și de a forma cu ele lungimi diferite permite efectuarea operațiilor aritmetice, în primul rând a adunării. Bețișoarele se compară cu numere, deci operațiile cu ele reflectă într-o formă „semiabstractă” procesele care se desfășoară în mintea elevului.

## I.2. Bazele metodice ale predării-învățării matematicii. Obiect și importanță

Metodicile sau „didacticile speciale” sunt discipline ce aparțin sistemului științelor educației, având ca obiect studierea și descoperirea legităților care guvernează procesul de predare-învățare și evaluare al unei anumite discipline școlare. Didactica generală sau teoria generală a procesului de învățământ studiază structura, relațiile și funcțiile subsistemului „proces de învățământ”, în ansamblul sau, „didactica specială”.

„Didactica specialității” sau „metodica disciplinei” are ca domeniu instruirea și educația ce se realizează prin predarea-învățarea - evaluarea unui singur obiect de învățământ sau grup de discipline.

În condițiile societății contemporane, dezvoltarea științei și tehnicii în ritm rapid a condus, implicit și la o concesiune mai largă a pedagogiei cu discipline de graniță sau apropiate ca finalitate: psihogenetica dezvoltării, psihologia pedagogică și diferențială, sociologia educației, îmbogățind compusul de informații cu privire la mecanismele procesului de formare a elevilor și tinerilor, la o mai profundă cunoaștere a dinamicii personalității copilului.

Cercetări experimentale de largă rezonanță și dispunând de o metodologie modernă de investigație sau concentrat, în multe țări, asupra eficienței procesului de învățământ, asupra actului predării, învățării și evaluării, asupra conținutului și finalităților pe care le-au analizat în viziune sistemică au propus soluții de ameliorare a acestora în optica teoriei acțiunii eficiente și a conducerii științifice (proiectare - realizare - evaluare). În condițiile în care conținutul învățământului și strategiile didactice se proiecteză în lumina unor obiective cât mai precise, iar rezultatele se măsoară cu „instrumente tot mai elaborate” (diagnostice și prognostice), în care predarea-învățarea devine o activitate cu dublă determinare, programare științifică și creație eficientă, termenul de metodică, înțeles ca un compendium de metode pe care le folosește învățătorul în procesul de învățământ, devine tot mai depășit. Se impune tot mai mult termenul de *metodologie a disciplinei școlare*, în înțelesul de structură științifică, normativă și prospectivă, care studiază demersurile de cunoaștere într-un domeniu anumit, supus condiționărilor și dirijării. Cu referire la învățământ, se încetănește tot mai mult termenul de *metodologie didactică*, înțeleasă că știința a metodelor utilizate în procesul de învățământ, ca teorie a naturii, și strategiilor, metodelor, tehniciilor și proceselor întrebuințate în predare și învățare.

*Metodologia învățământului matematic* are ca obiect studierea legităților procesului studierii matematicii în școală, cu toate implicațiile informative și formative ale acestei activități. Ea are o triplă valență: *teoretică*, de fundamentare prin cercetare și explicare logic-științifică și didactică a procesului învățării matematicii; *practica - aplicativă*, de fundamentare a bazelor elaborării normelor privind organizarea și conducerea științifică a activității de învățare a matematicii; *de dezvoltare, creare și ameliorare continuă a demersurilor și soluțiilor metodice* specifice acestei activități, în vederea obținerii unei eficiente tot mai înalte.

Metodologia predării-învățării matematicii oferă învățătorilor premisele cunoașterii dirijate a particularităților logice ale matematicii ca disciplină școlară, ale particularităților psihologice ale mecanismelor proceselor cognitive și motivational - atitudinale, precum și ale modului în care funcționează legitățile acestora în activitatea complexă de instruire și învățare a matematicii la nivelul ciclului primar.

Pe baza cunoașterii celor doi factori principali matematica și copilul, *metodica predării-învățării matematicii analizează în spiritul logicii științelor moderne obiectivele, conținuturile, strategiile didactice, mijloacele de învățământ folosite, formele de activitate și de organizare a*

elevilor, modalitățile de evaluare a randamentului și progresului școlar, bazele cultivării unor repertoriu motivaționale favorabile învățării matematicii<sup>3</sup>. Ea își propune totodată să ofere alternative teoretico metodologice, norme și metodele posibile de lucru care să asigure optimizarea învățământului matematic în ciclul primar.

Învățând să proiecteze sisteme de lecții și să integreze unitar toate condițiile de realizare a unei lecții (activitate) în lumina unor obiective clare și să evalueze rezultatele, progresele elevilor prin raportarea la aceste obiective, învățătorul nu va fi un simplu practician care aplică „rețete” metodice, ci un investigator care studiază atent fenomenele, aplică cu competență valorile științei convertită în disciplina școlară, își perfecționează continuu propria sa activitate, contribuind la ridicarea calității învățământului, la modernizarea lui, la pregătirea temeinică a generațiilor viitoare.

## I.3. Obiectivele predării-învățării matematicii la clasele I-IV

### I.3.1. Conceptul de obiectiv educațional

Obiectivele educaționale reprezintă o componentă a finalităților și se definesc în strânsă corelație cu idealul educațional și cu scopurile învățământului. Idealul educațional indică valorile supreme, modelul sintetic și abstract de personalitate ce se proiectează într-o anumită etapă istorică dată. Scopurile învățământului și educației orientează direcțiile principale pe termen mai lung spre care trebuie să se îndrepte acțiunea pentru realizarea și dezvoltarea lui.

Obiectivele reprezintă o concretizare, o specificare a scopurilor, atingând treapta operaționalității în acțiune. În funcție de obiective se definește, anticipatează, organizează, evaluează și reglează întreaga structură a activității pedagogice: conținuturile, metodele și mijloacele, formele de organizare a activității, relațiile învățător-elevi, sistemul de evaluare a randamentului și progresului școlar. Obiectivele educaționale orientează activitatea în toate compartimentele educației, ele constituind termeni de

<sup>3</sup> Săvulescu, D., *Metodica predării matematicii în ciclul primar*, Editura „Gheorghe Alexandru”, Craiova, 2006

referință pentru activitățile instructiv-educative și evaluarea rezultatelor obținute.

Pentru a se asigura condiții optime de realizare a obiectivelor educaționale, se impune, atât formularea (definirea) lor cât mai precisă (în termeni comportamentali care se referă la manifestări vizibile, controlabile și măsurabile) cât și tipologizarea și ierarhizarea lor în ordinea valorii, a importanței, ceea ce se traduce practic în elaborarea unei taxonomii a obiectivelor, care să servească conceperii și desfășurării activităților didactice.

### I.3.2. Clasificarea obiectivelor matematice

În spațiul celor trei domenii de clasificare se afirmă două tendințe: *formularea obiectivelor în termeni comportamentali și elaborarea de modele taxonomicice și morfologice de organizare a obiectivelor*. Enunțarea rezultatelor așteptate ale instruirii sub forma unor acțiuni, operații, produse constataabile sau, altfel spus specificarea a ceea ce vor fi capabili să facă elevii la încheierea unui proces de predare-învățare exprimă esența definirii comportamentale a obiectivelor. Pornind de la modelul taxonomic al obiectivelor specifice pentru domeniul cognitiv elaborat de B. S. Bloom, specialistii americanii în domeniul matematicii au elaborat o clasificare a componentelor cognitive aplicată pentru domeniul școlar<sup>4</sup>. Sintetic, această versiune este următoarea:

- *cunoaștere*: a cunoaște terminologia, faptele și regulile;
- *exprimare*: a transpune dintr-un limbaj în altul, a exprima ideile sub o înțelegere; forma verbală, simbolică sau geometrică; a raționaliza sistemele;
- *manipulare*: a stabili algoritmi; a folosi anumite tehnici; aplicare;
- *analiza*: a analiza datele, a descoperi definițiile, a determina pertinenta informației primite; a constata existența anumitor mecanisme, izomorfisme și simetrie; a analiza dovezile; a constata necesitatea unei informații complementare; a constata necesitatea unei dovezi sau a unui exemplu contrar;

---

<sup>4</sup> Cucoș, C. și colaboratorii, *Psihopedagogie*, Editura Polirom, Iași, 1998

- **alegere:** a face comparații; a alege faptele și tehnicele; a decanta; a prevedea; a aprecia, a schimba optica; a alege un nou sistem de simbol;
- **sinteză:** a specifica și a generaliza; a emite (formula) ipoteze, a formula (compune) probleme; a elabora o dovdă sau a defini o problemă după un plan de idei;
- **evaluare:** a aprecia răspunsurile; a judeca gradul de corectitudine al cestora; a evalua procedeul folosit pentru a ajunge la o soluție, a intui dovezile; a aprecia importanța unei probleme după anumite criterii.

### I.3.3. Operaționalizarea obiectivelor predării-învățării matematicii în clasele I-IV

În sfera matematicii acționează principiul pedagogic conform căruia cu cât obiectivele studierii ei sunt formulate mai precis, în sarcini concrete, relativ limitate și descriu comportamente pe cât posibile observabile și măsurabile, cu atât ele dau posibilitatea realizării funcției de orientare a tuturor aspectelor predării și învățării, oferind educatorului posibilitatea de a măsura și aprecia cât mai obiectiv rezultatele și progresele elevilor. Operaționalizarea obiectivelor constă între altele și într-o astfel de formulare precisă, concretă, avându-se în vedere natura și gradul de complexitate ale cunoștințelor, deprinderilor și priceperilor.

Obiectivele operaționale în sfera matematicii pot fi divizate în:

- **obiective de învățare**, care se referă la date, fapte, reguli și principii care se cer cunoscute;
- **obiective de transfer**, care se referă la capacitatea subiecților de a utiliza cunoștințele asimilate și în alte situații, fie similare, fie noi;
- **obiective de exprimare**, care se referă la capacitatea de comunicare și generalizare, precum și la posibilitățile de creație ale elevului.